

नाम

131

324 (EZ)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर उसे अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है : 1

- (i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक
- (ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित
- (iii) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य
- (iv) न स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक

(ख) यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, तो A से B तक फलनों की संख्या होगी : 1

- (i) 6
- (ii) 8
- (iii) 9
- (iv) 5

(ग) λ के किस मान के लिए सदिश $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और सदिश $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ लम्बवत् हैं ? 1

(i) -2 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4

(घ) समाकलन $\int x e^{-x} dx$ का मान है : 1

(i) $-(x+1)e^{-x}$ (ii) $(x+1)e^{-x}$

(iii) $(x-1)e^{-x}$ (iv) $-(x-1)e^{-x}$

(ङ) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$ की कोटि है : 1

(i) 2 (ii) 3

(iii) 5 (iv) 6

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए । 1

(ख) $\cos(\sin x^2)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए । 1

(ग) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$. 1

(घ) x के सापेक्ष $\log_e x$ का समाकलन कीजिए । 1

(ङ) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{3}{10}$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए । 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह AB ज्ञात कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. 2

(ख) क्या $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 1$ पर सतत है ? 2

(ग) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं। 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $N \times N$ में एक सम्बन्ध R निम्नवत् परिभाषित है :

$(a, b) R (c, d)$ यदि और केवल यदि $ad = bc$. सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

(ख) 'a' का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्तराल $[1, 2]$ में फलन $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है। 2

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = 1$ ($y \neq 1$) को हल कीजिए। 2

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है। यदि घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए, तो बताएँ कि क्या घटनाएँ E और F स्वतन्त्र हैं। 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि x, y, z विभिन्न हों और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 + 1 \\ y & y^2 & y^3 + 1 \\ z & z^2 & z^3 + 1 \end{vmatrix} = 0$, तो दर्शाइए कि $xyz = -1$. 5

(ख) सिद्ध कीजिए : $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 5

(ग) यदि $\cos y = x \cos (a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$. 5

(घ) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, -4)$, $B(1, -2, 3)$ और $C(3, 8, -11)$ संरेख हैं। 5

(ङ) हल कीजिए : $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ लम्बवत् हों, तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योगफल 6 पाया गया । संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

5

(ग) व्यवरोधों $3x + 4y \leq 60$, $x + 3y \leq 30$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $z = 8000x + 12000y$ का अधिकतमीकरण कीजिए ।

5

(घ) माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$; तो दर्शाइए कि $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

5

(ङ) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) समीकरण निकाय

$$x - y + z = 4$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए ।

8

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A(\text{adj } A) = |A|I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ वाले लम्ब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।

8

(ख) सिद्ध कीजिए :

8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 8

(ख) (i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ii) यदि $e^y(1 + x) = 1$ है, तो दिखाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ होगा । 3

(English Version)

Instructions :

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **nine** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do **all** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book. <https://www.upboardonline.com>

(a) In the set of real numbers, the relation R defined by $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ is : 1

- (i) not reflexive and symmetric, but transitive
- (ii) not reflexive and transitive, but symmetric
- (iii) not symmetric and transitive, but reflexive
- (iv) not reflexive, not symmetric and not transitive

(b) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, then number of functions from A to B will be : 1

- (i) 6
- (ii) 8
- (iii) 9
- (iv) 5

(c) For which value of λ are the vectors $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ perpendicular ? 1

- (i) -2
- (ii) 2
- (iii) 3
- (iv) 4

(d) The value of the integral $\int x e^{-x} dx$ is : 1

(i) $-(x + 1) e^{-x}$

(ii) $(x + 1) e^{-x}$

(iii) $(x - 1) e^{-x}$

(iv) $-(x - 1) e^{-x}$

(e) The order of the differential equation $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$ is : 1

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. Do **all** the parts :

(a) Find the principal value of $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$. 1

(b) Find the differential coefficient of $\cos(\sin x^2)$ with respect to x . 1

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$. 1

(d) Integrate $\log_e x$ with respect to x . 1

(e) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A|B) = \frac{3}{10}$, find $P(A \cup B)$. 1

3. Do **all** the parts :

(a) Find matrix AB if $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. 2

(b) Is the function $f(x)$ defined by $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{if } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ is continuous at $x = 1$? 2

(c) Evaluate : $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$. 2

(d) Find the area of the parallelogram whose adjacent sides are represented by the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. 2

4. Do **all** the parts :

- (a) A relation R is defined in $N \times N$ as follows :
 $(a, b) R (c, d)$ if and only if $ad = bc$. Prove that R is an equivalence relation. 2
- (b) Find the least value of ' a ' for which the function $f(x) = x^2 + ax + 1$ is increasing on the interval $[1, 2]$. 2
- (c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = 1$ ($y \neq 1$). 2
- (d) A die is thrown once. If E represents the event 'the number obtained on the die is a multiple of 3' and F represents the event 'the number obtained on the die is even', then tell whether the events E and F are independent. 2

Do **all** the parts :

- (a) If x, y, z are all different and $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3+1 \\ y & y^2 & y^3+1 \\ z & z^2 & z^3+1 \end{vmatrix} = 0$, show that
 $xyz = -1$. 5
- (b) Prove that : $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 5
- (c) If $\cos y = x \cos (a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$. 5
- (d) Show that the points $A(2, 3, -4)$, $B(1, -2, 3)$ and $C(3, 8, -11)$ are collinear. 5
- (e) Solve : $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$. 5

6. Do **all** the parts :

- (a) If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ are perpendicular, find the value of k . 5
- (b) A die was thrown twice and it was found that the sum of the numbers that appeared was 6. Find the conditional probability that the number 4 appeared at least once. 5
- (c) Maximize $z = 8000x + 12000y$ subject to constraints
 $3x + 4y \leq 60$,
 $x + 3y \leq 30$,
 $x \geq 0, y \geq 0$. 5

(d) Let $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$; then show that $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. 5

(e) Solve: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. 5

7. Do any **one** part :

(a) Solve by matrix method the system of equations : 8

$$x - y + z = 4$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A(\text{adj } A) = |A| I$ and find A^{-1} . 8

8. Do any **one** part :

(a) Prove that the radius of the right circular cylinder of maximum curved surface inscribed in a cone is half of the radius of the cone. 8

(b) Prove : 8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

9. Do any **one** part :

(a) Evaluate: $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$. 8

(b) (i) Find the area of the bounded region of $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. 5

(ii) If $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$ 3