

प्री-बोर्ड परीक्षा-2023-24

कक्षा-12

विषय-गणित

समय-3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक-100

सामान्य निर्देश :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
3. प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

प्रश्न 1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) समुच्चय N में $R = \{x, y\} : x + 2y = 8\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R का प्रान्त है :

- i) $\{2, 4, 8\}$ ii) $\{2, 4, 6, 8\}$
iii) $\{2, 4, 6\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4\}$

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तो $A + A' = I$, यदि α का मान है :

- i) $\frac{\pi}{6}$ ii) $\frac{\pi}{3}$ iii) π iv) $\frac{3\pi}{2}$

ग) अवकल $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ समीकरण का हल होगा :

- i) $x = \log y + c$ ii) $y = \log x + c$
iii) $x = e^y + c$ iv) इनमें से कोई नहीं

घ) यदि दो सदिश \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण θ हो, तो $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$, जब θ का मान है :

- i) 0 ii) π iii) $\frac{\pi}{2}$ iv) $\frac{\pi}{4}$

कृ.प.उ.

$$n = \frac{\pm dr}{\frac{1}{2} \frac{dV}{V} = \frac{4ac}{2a}}$$

a

(2)

ड) एक बॉक्स में 100 बल्ब हैं, जिसमें 10 त्रुटि युक्त हैं। 5 बल्ब के नमूने में से किसी भी बल्ब के त्रुटियुक्त न होने की प्रायिकता है :

- i) 10^{-1} ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ iii) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ iv) $\frac{9}{10}$ 1

प्रश्न 2. सभी खण्ड कीजिए :

क) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{7\pi}{4}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) यदि f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{यदि } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$

तो क्या f , $x=2$ पर संतत है ? 1

ग) $\int \frac{x^7}{1+x^{16}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

घ) बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ तथा $(1, 2, 3)$ का मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 1

ड) दिए गए शीर्ष बिन्दुओं $A(2, 7), B(1, 1), C(10, 8)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

प्रश्न 3. सभी खण्ड कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$, बिन्दु $x=1$ पर अवकलनीय है।

$f'(1)$ का मान भी ज्ञात कीजिए। 2

ख) निम्न समीकरण को हल कीजिए : 2

$$2 \tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$$

ग) एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुदिश गति करता है। वक्र पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर y -निर्देशांक, x -निर्देशांक के सापेक्ष 8 गुना तेजी से बढ़ता है। 2

घ) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

प्रश्न 4. सभी खण्ड कीजिए :

क) यदि फलन $f: Q \rightarrow Q$ सम्बन्ध $f(x) = 3x - 4, x \in Q$ से

परिभाषित हो, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी तथा आच्छादक फलन है, जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। 2

ख) यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि - 2

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2$$

ग) मान ज्ञात कीजिए - $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} dx$ 2

घ) सदिश $7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ का सदिश $2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

प्रश्न 5. सभी खण्ड कीजिए :

क) यदि $[x \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है, तो x का मान

ज्ञात कीजिए। 5

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ से प्रदत्त

फलन $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में निरन्तर वर्धमान फलन है। 5

ग) सिद्ध कीजिए कि धन पूर्णाकों के समुच्चय N में परिभाषित सम्बन्ध $R = \{(x, y) : x - y, 3 \text{ उसे विभाज्य है, जहाँ } x, y \in N\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

घ) अवकल समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$ को हल कीजिए। 5

ङ) किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि - 5

$$[\vec{a} + \vec{b} \ \vec{b} + \vec{c} \ \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

प्रश्न 6. सभी खण्ड कीजिए -

क) सारणिक विधि से दिखाइए कि बिन्दु $A(a, b + c)$, $B(b, c + a)$, $C(c, a + b)$ संरेख है। 5

(4)

ख) $\int \frac{1}{1+x+x^2+x^3} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ग) रेखा $y = 3x + 2$, x -अक्ष एवं कोरियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

घ) निम्नलिखित अवरोधों $x + 3y \leq 5$
 $x + y \leq 3$
 $x \geq 0, y \geq 0$

के अन्तर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ बिन्दुओं $A(3, 4, 1)$ और $B(5, 1, 6)$ को मिलाने वाली रेखा xy -समतल को काटती है। 5

प्रश्न 7. कोई एक खण्ड कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है। 8

ख) निम्नलिखित समीकरण को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 4 \\x + 2y + z &= 1 \\x + y + z &= 2\end{aligned}$$

प्रश्न 8. कोई एक खण्ड कीजिए :

क) रेखाएँ $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

ख) सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^{\pi/4} \log \sin 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{4} \log 2$ 8

प्रश्न 9. कोई एक खण्ड कीजिए :

क) एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं तथा दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। इसमें से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से गेंद निकाली जाती है जो लाल है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह लाल गेंद पहले थैले से निकाली गई है। 8

ख) अवकल समीकरण $(1 + y^2) + (x - e^{-\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0$ को हल

कीजिए।

8